

Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil uman

Faza locală - 17 februarie 2017

Clasa a XII-a - barem de corectare

1.a)	Se calculează $A^3 - A = A^2 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.	2p
1.b)	Inducție matematică	2p
1.c)	Din b) se obține $A^{100} = 50A^2 - 49I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 50 & 50 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	3p
2.a)	$\forall A(a), A(b) \in G \Rightarrow A(a) \cdot A(b) = A(a+b) \in G, a, b \in \mathbb{R}$	3p
2.b)	Din a) $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2017) = A(1+2+\dots+2017) =$ $= A(1009 \cdot 2017)$	2p 2p
3.a)	$\Delta = \begin{vmatrix} 45678 & 45688 \\ 12345 & 12355 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45678 & 45678 \\ 12345 & 12345 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 45678 & 10 \\ 12345 & 10 \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} 45678 & 10 \\ 12345 & 10 \end{vmatrix} = 456780 - 123450 = 333330$.	2p 1p
3.b)	$\begin{vmatrix} x-9 & x & x \\ x & x-9 & x \\ x & x & x-9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x-9 & x & x \\ 3x-9 & x-9 & x \\ 3x-9 & x & x-9 \end{vmatrix} = (3x-9) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & x-9 & x \\ 1 & x & x-9 \end{vmatrix} =$ $= (3x-9) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 243(x-3)$ Se obține soluția $x=3$.	2p 1p 1p
4.a)	Calcul $A - {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ Observă că $(A - {}^tA)^4 = 2^4 I_2$ $(A - {}^tA)^{2017} = (A - {}^tA)^{4 \cdot 504 + 1} = 2^{2016} I_2 \cdot (A - {}^tA) \Rightarrow (A - {}^tA)^{2017} = 2^{2017} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.	1p 1p 2p
4.b)	Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Din $X^3 = A$ avem $X^4 = AX$ și $X^4 = XA$. Deci $AX = XA$ Din $AX = XA$ rezultă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ Calcul pentru $X^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3ab(a+b)+b^3 \\ 0 & (a+b)^3 \end{pmatrix}$, de unde $a=1, b=\sqrt[3]{3}-1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt[3]{3}-1 \\ 0 & \sqrt[3]{3} \end{pmatrix}$.	1p 1p 1p

NOTĂ: Orice soluție corectă se punctează corespunzător